O estymacji nieznanych parametrów w układach wagowych

Małgorzata Graczyk, Bronisław Ceranka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych
Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

4 lipca 2024

1 Wstęp

2 Wyniki

3 Parzysta liczba obiektów

4 Konstrukcje

5 Literatura

Model

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{w} + \mathbf{e}$$

gdzie

- $\mathbf{y} \quad n \times 1$
- $\mathbf{w} \quad p \times 1$
- $\mathbf{X} = (x_{ij}) \quad i = 1, 2, ..., n, \ j = 1, 2, ..., p$
- $\mathbf{X} \in \mathbf{U}_{n \times p}(0, 1) \quad \Rightarrow \quad$ sprężynowy układ wagowy
- $\mathbf{X} \in \mathbf{P}_{n \times p}(-1, 0, 1) \ \Rightarrow \ $ chemiczny układ wagowy
- $\mathrm{E}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}_n, \ \mathrm{Var}(\mathbf{e}) = \sigma^2\mathbf{G}.$

Estymator

- $\mathrm{r}(\mathbf{X}) = p$
- $\hat{\mathbf{w}} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{y}$
- $\mathrm{Var}\left(\hat{\mathbf{w}}\right) = \sigma^2\left(\mathbf{X}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}$

$\mathbf{M} = \mathbf{X}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X}$ macierz informacji dla układu $\mathbf{X}$.

Kryteria optymalności

$\mathbf{U}_{n\times p}(0,1)$
$\mathbf{P}_{n\times p}(-1,0,1)$ $\quad \sigma^2\mathbf{G} \quad \eta\left(\mathbf{X}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}$

- układ A-optymalny $\Rightarrow \operatorname{tr}\left(\mathbf{X}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}$
- układ D-optymalny $\Rightarrow \det\left(\mathbf{X}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}$
- układ E-optymalny $\Rightarrow$ wartość własna $\left(\mathbf{X}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}$

Zastosowania

- substancje promieniotwórcze
- geodezja
- mieszanki paszowe
- optyka

Cel badań

- Wyznaczenie estymatora wektora $\mathbf{w}$ o najmniejszym iloczynie wariancji składowych w danej klasie.
- Wyznaczenie warunków koniecznych i dostatecznych, przy spełnieniu których iloczyn wariancji składowych tego estymatora jest najmniejszy.
- Wyprowadzenie wzorów określających postać macierzy układu.
- Wyznaczenie metod konstrukcji macierzy spełniających wyprowadzone warunki.
- Podanie planów układów optymalnych.

- $\mathbf{G} = g\left[(1-\rho)\mathbf{I}_n + \rho\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'\right],\ g > 0,\ \frac{-1}{n-1} < \rho < 1$
- $\mathbf{X} \in \mathbf{U}_{n\times p}(0,1)$

Macierz $\bar{\mathbf{M}}$

- $\mathbf{D}$ zbiór $p \times p$ macierzy permutacji
- $\mathbf{M}$ $p \times p$
- $\bar{\mathbf{M}} = \frac{1}{p!} \sum_{\mathbf{P} \in \mathbf{D}} \mathbf{P}' \mathbf{M} \mathbf{P}$
- $\bar{\mathbf{M}} = \left(\frac{p \operatorname{tr}(\mathbf{M}) - \mathbf{1}_p' \mathbf{M} \mathbf{1}_p}{p(p-1)} \right) \mathbf{I}_p + \frac{\mathbf{1}_p' \mathbf{M} \mathbf{1}_p - \operatorname{tr}(\mathbf{M})}{p(p-1)} \mathbf{1}_p \mathbf{1}_p'$
  - $\operatorname{tr}(\bar{\mathbf{M}}) = \operatorname{tr}(\mathbf{M})$
  - $\mathbf{1}_p' \bar{\mathbf{M}}\, \mathbf{1}_p = \mathbf{1}_p' \mathbf{M} \mathbf{1}_p$
  - $\mu_1 = \frac{p \operatorname{tr}(\mathbf{M}) - \mathbf{1}_p' \mathbf{M} \mathbf{1}_p}{p(p-1)}$ wartość własna $\bar{\mathbf{M}}$ o krotności $p - 1$
  - $\mu_2 = \frac{\mathbf{1}_p' \mathbf{M} \mathbf{1}_p}{p}$ wartość własna $\bar{\mathbf{M}}$ o krotności 1.

Macierz $\bar{\mathbf{M}}$ dla analizowanego układu

$$\mathbf{M} = \frac{1}{g(1-\rho)}\left[\mathbf{X}'\mathbf{X} - \frac{\rho}{1+\rho(n-1)}\mathbf{X}'\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'\mathbf{X}\right].$$

Oznaczmy $\mathbf{X1}_p = \mathbf{k}$

$$\Downarrow$$

Macierz $\bar{\mathbf{M}}$ ma dwie wartości własne

- $\mu_1 = \frac{1}{p(p-1)g(1-\rho)}\left[p\mathbf{1}_n'\mathbf{k} - \mathbf{k}'\mathbf{k}\right]$ o krotności $p-1$
- $\mu_2 = \frac{1}{pg(1-\rho)}\left[\mathbf{k}'\mathbf{k} - \frac{\rho}{1+\rho(n-1)}(\mathbf{1}_n'\mathbf{k})^2\right]$ o krotności 1
- $\det(\bar{\mathbf{M}}) = \frac{\left(p\mathbf{1}_n'\mathbf{k}-\mathbf{k}'\mathbf{k}\right)^{p-1}\left(\mathbf{k}'\mathbf{k}-\frac{\rho}{1+\rho(n-1)}(\mathbf{1}_n'\mathbf{k})^2\right)}{p^p(p-1)^{p-1}g^p(1-\rho)^p}$

Cel

Wyznaczenie takiego wektora **k**, aby układ był optymalny

$$\left(p\mathbf{1}_n^{'}\mathbf{k}-\mathbf{k}^{'}\mathbf{k}\right)^{p-1}\left(\mathbf{k}^{'}\mathbf{k}-\frac{\rho}{1+\rho(n-1)}(\mathbf{1}_n^{'}\mathbf{k})^2\right)$$

$$\Downarrow$$

$$1\leq k\leq p,\ h=1,2,...,n$$

- $\frac{\partial}{\partial k_h}\left(p\mathbf{1}_n'\mathbf{k}-\mathbf{k}'\mathbf{k}\right)^{p-1}\left(\mathbf{k}'\mathbf{k}-\frac{\rho}{1+\rho(n-1)}(\mathbf{1}_n'\mathbf{k})^2\right)=$
  $A\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}k_i(p-k_i)\right)^{p-2}=0$
- $k_h=k_{h'}$, $h\neq h'$, $h,h'=1,2,...,n$
- $\mathbf{X1}_p=k\mathbf{1}_n$
- $A=\Big\{2k_hp\sum_{i=1}^{n}k_i(1-ki)+p(p-1)\sum_{i=1}^{n}k_i^2-$
  $\frac{\rho(p-1)(p-2k_h)}{1+\rho(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\right)^2-\frac{2\rho}{1+\rho(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}k_i(p-k_i)\right)\Big\}.$

Macierz układu

$\mathbf{X1}_p = k\mathbf{1}_n$

- $\mu_1 = \frac{nk(p-k)}{p(p-1)g(1-\rho)}, \ \mu_2 = \frac{nk^2}{pg(1+\rho(n-1))}$
- $\det(\bar{\mathbf{M}}) = \frac{n^p k^{p+1}(p-k)^{p-1}}{p^p(p-1)^{p-1}g^p(1-\rho)^{p-1}(1+\rho(n-1))}$.

$$\Downarrow$$

$$f(k) = k^{p+1}(p-k)^{p-1}$$

- $f^{'}(k) = 0 \Leftrightarrow p = k \text{ lub } k = \frac{p+1}{2}$
- $p = k \ \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^{'}$
- $k = \frac{p+1}{2} \Rightarrow f_{max} = \frac{(p+1)^{p+1}(p-1)^{p-1}}{4p}$.

Macierz układu : nieparzysta liczba obiektów

$k = \frac{p+1}{2}$

$$\det(\bar{\mathbf{M}}) \leq \frac{(p+1)(1-\rho)}{1+\rho(n-1)} \left(\frac{n(p+1)}{4pg(1-\rho)} \right)^p .$$

Niech m_1 będzie wartością własną o krotności $p-1$, m_2 będzie wartością własną o krotności 1 $p \times p$ wymiarowej macierzy $\mathbf{M}$.
Niech μ_1 będzie wartością własną o krotności $p-1$, μ_2 będzie wartością własną o krotności 1 $p \times p$ wymiarowej macierzy $\bar{\mathbf{M}}$.
Jeżeli

- $(p-1)m_1 + m_2 = (p-1)\mu_1 + \mu_2$
- $m_1 \leq m_2$
- $\mu_1 \leq \mu_2$
- $m_1 \leq \mu_1$

to $\det(\mathbf{M}) \leq \det(\bar{\mathbf{M}})$.
Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy $\mathbf{M} = \bar{\mathbf{M}}$.

Twierdzenie

Jeżeli $p = 2k - 1$ oraz $\mathbf{X} \in \mathbf{U}_{n\times p}(0,1)$ z macierzą kowariancji błędów $\sigma^2 g\left[(1-\rho)\mathbf{I}_n + \rho\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'\right]$, to

$$\det(\mathbf{M}) \leq \frac{(p+1)(1-\rho)}{1+\rho(n-1)}\left(\frac{n(p+1)}{4pg(1-\rho)}\right)^p.$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbf{M} = \frac{n(p+1)}{4pg(1-\rho)}\left(\mathbf{I}_p + \left(1 - \frac{\rho n(p+1)}{p(1+\rho(n-1))}\right)\mathbf{1}_p\mathbf{1}_p'\right).$$

Szczególny przypadek

Rozważmy $\det(\bar{\mathbf{M}})$, gdzie $\det(\mathbf{M}) \leq \frac{(p+1)1-\rho}{1+\rho(n-1)} \left(\frac{n(p+1)}{4pg(1-\rho)}\right)^p$ jako funkcję ρ.

$$u(\rho) = \frac{(p+1)(1-\rho)}{1+\rho(n-1)} \left(\frac{n(p+1)}{4pg(1-\rho)}\right)^p$$

- $\rho \to 1$ lub $\rho \to -\frac{1}{n-1} \Rightarrow u(\rho) \to \infty$

- $\det(\bar{\mathbf{M}}) = \frac{\left(p\mathbf{1}_n'\mathbf{k}-\mathbf{k}'\mathbf{k}\right)^{p-1}\left(\mathbf{k}'\mathbf{k}-\frac{\rho}{1+\rho(n-1)}(\mathbf{1}_n'\mathbf{k})^2\right)}{p^p(p-1)^{p-1}g^p(1-\rho)^p}$
- $p = 2s \Rightarrow$ maksimum $\det(\bar{\mathbf{M}})$ nie jest osiągnięte.
- $\mathbf{X1}_p = k\mathbf{1}_n$, $1 \leq k < p$
- Liczby naturalne najbliższe $k = 0.5(p+1)$ to $k = 0.5p$ oraz $k = 0.5(p+2)$
- $\det(\bar{\mathbf{M}}(0.5p)) > \det(\bar{\mathbf{M}}(0.5(p+2)))$, gdzie $\bar{\mathbf{M}}(x)$ wyznaczamy dla macierzy o własności $\mathbf{X1}_p = x\mathbf{1}_n$.
- $\det(\mathbf{M})$ przyjmuje największą wartość dla parzystej liczby obiektów p gdy $k = 0.5p$
- $\det(\bar{\mathbf{M}}) \leq \frac{(p-1)(1-\rho)}{1+\rho(n-1)}\left(\frac{np}{4g(p-1)(1-\rho)}\right)^p$.

Twierdzenie

Jeżeli $k = 0.5p$ oraz $\mathbf{X} \in \mathbf{U}_{n\times p}(0,1)$ z macierzą kowariancji błędów $\sigma^2 g\left[(1-\rho)\mathbf{I}_n + \rho\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'\right]$, to

$$\det(\mathbf{M}) \leq \frac{(p-1)(1-\rho)}{1+\rho(n-1)}\left(\frac{np}{4g(p-1)(1-\rho)}\right)^p .$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbf{M} = \frac{n}{4g(p-1)(1-\rho)}\left(p\mathbf{I}_p + \frac{p-2-\rho(n+p-2)}{1+\rho(n-1)}\mathbf{1}_p\mathbf{1}_p'\right).$$

Szczególny przypadek

Rozważmy $\det(\bar{\mathbf{M}})$ w postaci

$$\det(\bar{\mathbf{M}}) \leq \frac{(p-1)(1-\rho)}{1+\rho(n-1)} \left(\frac{np}{4g(p-1)(1-\rho)} \right)^p$$

dla parzystej liczby obiektów p jako funkcję ρ. Wtedy

$$u(\rho) = \frac{(p-1)(1-\rho)}{1+\rho(n-1)} \left(\frac{np}{4g(p-1)(1-\rho)} \right)^p.$$

Jeżeli $\rho \to 1$ lub $\rho \to \frac{-1}{n-1}$ to $u(\rho) \to \infty$.

Uwaga

Układ $\mathbf{X}$, dla którego $\mathbf{X}\mathbf{1}_p = 0.5p\mathbf{1}_n$ nie jest regularnie D-optymalny.

- $\mathbf{X} \in \mathbf{U}_{n\times p}(0,1)$
- $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k\mathbf{1}_{n_1} \\ (k+1)\mathbf{1}_{n-n_1} \end{bmatrix}, \ k = 0.5p$
- $n_1 = \frac{n(p+2)}{2(p+1)}$
- $\mu_1 = \frac{n(p+2)}{4g(p+1)(1-\rho)}, \ \mu_2 = \frac{n(p+2)}{4g(1-\rho)}$
- $\mathbf{M} = \frac{n(p+2)}{4g(p+1)(1-\rho)} \left(\mathbf{I}_p + \left(1 - \frac{(p+2)}{(p+1)(1+\rho(n-1))} \right) \mathbf{1}_p \mathbf{1}_p' \right)$

Twierdzenie

Jeżeli $p = 2k$ oraz $\mathbf{X} \in \mathbf{U}_{n\times p}(0,1)$z macierzą kowariancji błędów $\sigma^2 g\left[(1-\rho)\mathbf{I}_n + \rho\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'\right]$, to

$$\det(\mathbf{M}) \le \left(\frac{n(p+2)}{4g(p+1)(1-\rho)}\right)^p \left(p+1-\frac{\rho np(p+2)}{(p+1)(1+\rho(n-1))}\right).$$

Równość jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbf{M} = \frac{n(p+2)}{4g(p+1)(1-\rho)}\left(\mathbf{I}_p + \left(1-\frac{\rho n(p+2)}{(p+1)(1+\rho(n-1))}\right)\right).$$

Jeśli $g = 1$ oraz $\rho = 0$, to $\det(\mathbf{X}'\mathbf{X}) \le (p+1)\left(\frac{n(p+2)}{4(p+1)}\right)^p$.

- Układ zrównoważony o blokach niekompletnych z parametrami $v,\ b,\ r,\ k,\ \lambda$ i macierzą incydencji $\mathbf{N}$
- $\mathbf{X} = \mathbf{N}^\top$

Twierdzenie

Niech v będzie liczbą nieparzystą oraz $\mathbf{N}$ będzie macierzą incydencji układu zrównoważonego o blokach niekompletnych z parametrami $v = 2k - 1$, $b = \frac{2\lambda(2k-1)}{k}$, $r = 2\lambda$, k, λ.
Wtedy $\mathbf{X} \in \mathbf{U}_{n\times p}\{0,\ 1\}$ w postaci $\mathbf{X} = \mathbf{N}^\top$ jest macierzą regularnego D-optymalnego sprężynowego układu wagowego.

Twierdzenie

Niech v będzie liczbą nieparzystą oraz $\mathbf{N}$ będzie macierzą incydencji układu zrównoważonego o blokach niekompletnych z parametrami

1. $v = 2t + 1$, $b = 2(2t + 1)$, $r = 2(t + 1)$, $k = \lambda = t + 1$, $t = 1, 2, \cdots$,
2. $v = b = 4t + 3$, $r = k = 2(t + 1)$, $\lambda = t + 1$,
3. $v = 2t + 1$, $b = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ t+1 \end{pmatrix}$, $r = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$, $k = t + 1$, $\lambda = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t-1 \end{pmatrix}$ $t = 1, 2, \cdots$,
4. $v = t^2$, $b = 2t^2$, $r = t^2 + 1$, $k = \lambda = 0.5(t^2 + 1)$.

Wtedy $\mathbf{X} = \mathbf{N}^\top$ jest macierzą regularnego D-optymalnego sprężynowego układu wagowego w klasie $\mathbf{U}_{n\times p}\{0,\ 1\}$.

Niech $\mathbf{X} \in \mathbf{U}_{n\times p}\{0,\ 1\}$ będzie macierzą sprężynowego układu wagowego w postaci

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}^\top,$$

gdzie $\mathbf{N}_s$ jest macierzą incydencji układu zrównoważonego o blokach niekompletnych z parametrami v, b_s, r_s, k_s, λ_s, $s = 1, 2$, $n = b_1 + b_2$, $p = v$.

Twierdzenie

Niech $v = 2s$. Jeżeli istnieją macierze incydencji $\mathbf{N}_1$ i $\mathbf{N}_2$ układów BIB z parametrami v, b_s, r_s, k_s, λ_s, $s = 1, 2$, oraz

1. $r_1 + r_2 = 2(\lambda_1 + \lambda_2)$
2. $b_1 = r_1 + r_2$

to $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}^\top \in \mathbf{U}_{n\times p}\{0,\ 1\}$ jest macierzą D-optymalnego sprężynowego układu wagowego.

Niech $v = 2s$ oraz $\mathbf{N}_s$ będzie macierzą incydencji układu BIB z parametrami v, b_s, r_s, k_s, λ_s, $s = 1, 2$,

1. $v = 4$, $b_1 = 6$, $r_1 = 3$, $k_1 = 2$, $\lambda_1 = 1$ oraz $v = 4$, $b_2 = 4$, $r_2 = 3$, $k_2 = 3$, $\lambda_2 = 2$,
2. $v = 6$, $b_1 = 20$, $r_1 = 10$, $k_1 = 3$, $\lambda_1 = 4$ oraz $v = 6$, $b_2 = 15$, $r_2 = 10$, $k_2 = 4$, $\lambda_2 = 6$,
3. $v = 8$, $b_1 = 70$, $r_1 = 35$, $k_1 = 4$, $\lambda_1 = 15$ oraz $v = 8$, $b_2 = 56$, $r_2 = 35$, $k_2 = 5$, $\lambda_2 = 20$,
4. $v = 10$, $b_1 = 18$, $r_1 = 9$, $k_1 = 5$, $\lambda_1 = 4$ oraz $v = 10$, $b_2 = 15$, $r_2 = 9$, $k_2 = 6$, $\lambda_2 = 5$,
5. $\cdots$

to $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}^\top \in \mathbf{U}_{n\times p}\{0,\ 1\}$ jest macierzą D-optymalnego sprężynowego układu wagowego.

Układ o grupach podzielnych

- ζ liczba grup
- κ liczba obiektów w grupie
- $v = \zeta\kappa$ liczba obiektów
- b liczba bloków
- r liczba powtórzeń
- k wielkość bloków
- Dwa obiekty należące do tej samej grupy są pierwszymi partnerami, dwa obiekty należące do różnych grup są drugimi partnerami.
- λ_s liczba spotkań ze sobą s-tych partnerów, $s = 1, 2$
- $\det\left(\mathbf{NN}'\right) = rk(rk - v\lambda_2)^{\zeta-1}(r - \lambda_1)^{\zeta(\kappa-1)}$

Układ o grupach podzielnych

$v = 6$, $b = 3$, $r = 2$, $k = 4$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$

$\zeta = 2$, $\kappa = 3$

1	4
2	5
3	6

$$\mathbf{N}_{GP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \end{array} \right]^\top,$$

gdzie $\mathbf{N}_s$ jest macierzą incydencji układu o grupach podzielnych o tym samym schemacie partnerstwa z parametrami v, b_s, r_s, k_s, λ_{1s}, λ_{2s}, $s = 1, 2$, oraz

$$\lambda_{11} + \lambda_{12} = \lambda_{21} + \lambda_{22}.$$

Konstrukcja układu D-optymalnego

Twierdzenie

Niech v będzie liczbą parzystą. Jeżeli istnieją macierze incydencji układów o grupach podzielnych o takim samym schemacie partnerstwa z parametrami v, b_s, r_s, k_s, λ_{1s}, λ_{2s}, $s = 1, 2$,
oraz

1. $\lambda_{11} + \lambda_{12} = \lambda_{21} + \lambda_{22}$
2. $r_1 + r_2 = 2(\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{21} + \lambda_{22})$
3. $b_1 = r_1 + r_2$

to $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}^\top \in \mathbf{U}_{n\times p}\{0,\ 1\}$ jest macierzą regularnego D-optymalnego sprężynowego układu wagowego.

Konstrukcja układu D-optymalnego

Niech v będzie liczbą parzystą oraz $\mathbf{N}_s$ bedzie macierzą incydencji układu o grupach podzielnych o takim samym schemacie partnerstwa z parametrami v, b_s, r_s, k_s, λ_{1s}, λ_{2s}, $s = 1, 2$. Jeżeli

1. $v = 6$ oraz
   - (1.1) $b_1 = 4$, $r_1 = 2$, $k_1 = 3$, $\lambda_{11} = 0$, $\lambda_{21} = 1$ i $b_2 = 3$, $r_2 = 2$, $k_2 = 4$, $\lambda_{12} = 2$, $\lambda_{22} = 1$,
   - (1.2) $b_1 = 8$, $r_1 = 4$, $k_1 = 3$, $\lambda_{11} = 0$, $\lambda_{21} = 2$ i $b_2 = 6$, $r_2 = 4$, $k_2 = 4$, $\lambda_{12} = 4$, $\lambda_{22} = 2$,
   - (1.3) $b_1 = 12$, $r_1 = 6$, $k_1 = 3$, $\lambda_{11} = 0$, $\lambda_{21} = 3$ i $b_2 = 9$, $r_2 = 6$, $k_2 = 4$, $\lambda_{12} = 6$, $\lambda_{22} = 3$,
   - ...

to $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}^\top \in \mathbf{U}_{n \times p}\{0,\ 1\}$ jest macierzą regularnego D-optymalnego sprężynowego układu wagowego.

Konstrukcja układu efektywnego dla parzystej liczby obiektów

Twierdzenie

Jeżeli **N** jest macierzą incydencji układu zrównoważonego o blokach niekompletnych z parametrami $v = 2k$, $b = 2r$, r, k, $\lambda = \frac{b(v-2)}{4(v-1)}$, to $\mathbf{X} = \mathbf{N}^\top \in \mathbf{U}_{n\times p}\{0,\ 1\}$ jest wysoce efektywnym sprężynowym układem wagowym.

Konstrukcja układu efektywnego

Jeżeli v jest liczbą parzystą oraz $\mathbf{N}$ jest macierzą incydencji układu zrównoważonego o blokach niekompletnych z parametrami

1. $v = 2t$, $b = 2(2t-1)$, $r = 2t-1$, $k = t$, $\lambda = t-1$,
2. $v = 2t$, $b = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$, $r = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t-1 \end{pmatrix}$, $k = t$, $\lambda = \begin{pmatrix} 2(t-1) \\ t-2 \end{pmatrix}$,

$t = 2, 3, \cdots$, to $\mathbf{X} = \mathbf{N}^\top \in \mathbf{U}_{n \times p}\{0,\ 1\}$ jest wysoce D-efektywnym sprężynowym układem wagowym.

Uwaga

Wysoce D-efektywne sprężynowe układy wagowe wyznaczamy w tych klasach, w których nie można wyznaczyć układów D-optymalnych, np. $\mathbf{U}_{6\times 4}\{0,\ 1\}$, $\mathbf{U}_{10\times 6}\{0,\ 1\}$.

- Ceranka B., Graczyk M. & Katulska K., On some constructions of regular D–optimal spring balance weighing designs, Biometrical Letters, 103-–112 (2009)
- Ceranka B. & Graczyk M., Robustness optimal spring balance weighing designs for estimation total weight, Kyberntika, 47, 902–908 (2011)
- Ceranka B. & Graczyk M., Robustness of optimal chemical balance weighing designs for estimation total weight, Communication in Statistics, Theory and Methods, 41, 2297–2304 (2012)
- Cheng C.S., Optimal biased weighing designs and two-level main-effect plans, Journal of Statistical Theory and Practice, 8, 83–99, (2014)
- Clatworthy W. H., Tables of Two-Associated-Class Partially Balanced Design, 314. NBS Applied Mathematics Series, 63 (1973)

- Gail Z. & Kiefer J., D-optimum weighing designs, The Annals of Statistics 8, 1293–1306 (1980)
- Gail Z. & Kiefer J., Construction methods D-optimum weighing designs when $n = 3(mod 4)$, Ann. Statistics, 11, 970–978 (1982)
- Graczyk, M., Ceranka, B., . Contribution to spring balance weighing designs. Biometrical Letters 59(1), 47-53 (2022)
- Graczyk, M., Ceranka, B., Notes on the Efficiency of Spring Balance Weighing Designs with Correlated Errors for An Even Number of Objects. Folia Oeconomica 1(362), 1-8 (2023)
- Hudelson M., Klee V.& Larman D., Largest j-simplices in d-cubes : Some relatives to the Hadamard determinant problem, Linear Algebra and its Applications, 24, 519–598 (1996)
- Jacroux M. & Notz W., On the optimality of spring balance weighing designs, The Annals of Statistics, 11, 970–978, (1983)

- Katulska K. & Przybył K., On certain D-optimal spring balance weighing designs, Journal of Statistical Theory and Practice, 1, 393–404 (2007)
- Masaro J. & Wong C. S., Robustness of A-optimal designs, Linear Algebra Appl., 429, 1392—1408 (2008)
- Neubauer M. G., Watkins W.& Zeitlin J., Maximal j-simpplices in the real D-dimensional unit cube, Journal of Combinatorial Theory, A 80, 1–12 (1997)
- Neubauer M. G., Watkins W. & Zeitlin J., Notes on D-optimal designs, Algebra and its Applications, 30, 109–127 (1998)
- Raghavarao D. & Padgett L. V., Block Designs, Analysis, Combinatorics and Applications, 224. Series of Applied Mathematics, Word Scientific Publishing Co. Pte. Ltd 17 (2005)
- Smaga Ł., Necessary and sufficient conditions in the problem of D-optimal weighing designs with autocorrelated errors, Statistics & Probability Letters, 92, 12–16 (2014)

Dziękuję bardzo za uwagę !